**Leçon 160 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).**

Cadre : E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geq 1$.

## 1. Adjoint d'un endomorphisme. —

*1. Définitions et propriétés.* —

- Pro : Pour tout $f \in End(E)$, il existe un unique endomorphisme $f^* \in End(E)$ tel que $\forall x, y \in E$, $< f(x), y > = < x, f^*(y) >$. L'endomorphisme $f^*$ est appelé adjoint de f.
- Pro : $f \mapsto f^*$ est un endomorphisme involutif : $(f^*)^* = f$
- Pro+Def : Pour B une base de E, on a $Mat(f^*, B) = Mat(f, B)^t$. Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$ on définit alors l'adjoint de M par $M^t$.
- App : $M.M^t = 0 \Rightarrow M = 0$.
- Pro : Pour $f, g \in End(E)$, on a : $(fg)^* = g^*f^*$, $rg(f^*) = rg(f)$, $det(f^*) = det(f)$, $Ker(f)^\perp = Im(f^*)$, $Im(f)^\perp = Ker(f^*)$, $\chi_f = \chi_{f^*}$, $\mu_f = \mu_{f^*}$.
- Pro : Si F est un s-ev qui est f-stable, alors $F^\perp$ est $f^* - stable$.

*2. Vocabulaire.* —

- Def : $f \in End(E)$ est dit autoadjoint/symétrique si $f^* = f$.
  Matriciellement, cela se traduit par $M^t = M$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble associé.
- Def : $f \in End(E)$ est dit antisymétrique si $f^* = -f$.
  Matriciellement, cela se traduit par $M^t = -M$. On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble associé.
- Ex : Les projecteurs orthogonaux sont autoadjoints.
- Def : $f \in End(E)$ est une isométrie/orthogonal si $f^*f = ff^* = Id_E$.
  Matriciellement, cela se traduit par $M^tM = MM^t = I_n$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble associé.
- Ex : Les symétries orthogonales sont des isométries.
- Def : $f \in End(E)$ est dit normal si $f^*f = ff^*$.
  Matriciellement, cela se traduit par $M^tM - MM^t = 0$.
- Ex : Les endomorphismes auto-adjoints, antisymétriques, et orthogonaux sont normaux.
- Contre-ex : La matrice $M = E_{n,1}$ n'est ni autoadjointe, ni orthogonale, ni normale.

## 2. Endomorphismes auto-adjoints. —

*1. Quelques propriétés.* —

- Def : Un endomorphisme auto-adjoint f est autoadjoint positif si $\forall x \in E$, $< f(x), f(x) > \geq 0$.
  On note alors $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices associé. L'endomorphisme f est dit défini si $< f(x), f(x) > = 0 \Rightarrow x = 0$.
  On note alors $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices associé.
- Pro : $M \in S_n(\mathbb{R}) \Rightarrow Sp(M) \subset \mathbb{R}$.
- Pro : $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp $S_n^{++}(\mathbb{R})$) $\Rightarrow M \in S_n(\mathbb{R})$ et $Sp(M) \subset \mathbb{R}_+$ (resp $\mathbb{R}_+^*$).
- Pro : Si f est auto-adjoint, alors pour tout F s-ev f-stable, $F^\perp$ est f-stable.
- Pro : $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
  $dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Pro : $M \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mapsto < MX, Y >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

*2. Réduction des endomorphismes auto-adjoints.* —

- Thm : Soit $f \in End(E)$ autoadjoint. Alors il existe une base orhtonormée B de vecteurs propres de f.
  Matriciellement, pour $S \in S_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que : $PSP^{-1} = Diag(\lambda_1, .., \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
- Théorème : Soit q une forme quadratique réelle sur $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle $q(x_1, .., x_n) = \sum_i \lambda_i x_i^2$.
- Pro : (Pseudo-réduction simultanée) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
  Il existe $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $PBP^t = I_n$ et $PAP^t$ est diagonale.

*3. Applications.* —

- App : $\log(\det())$ est strictement convexe sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$
- App : Pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une unique $S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S'^2 = S$.
  S' est appelée racine carrée de S.
- App : (Décomposition polaire) Pour tout $M \in Gl_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $O, S \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $M = OS$.
- Pro : Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Alors $|||S|||_2 = \rho(S) := max(|\lambda_i|)$, où $\rho(S)$ est le rayon spectral de S.
- **Dev** : L'exponentielle de matrices est un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ vers $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

## 3. Endomorphismes normaux. —

- Pro : f est un endomorphisme normal ssi $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.
- Pro : Soit f endomorphisme normal et $E_\lambda$ un sous-espace propre de f. Alors $E_\lambda^\perp$ est $f^*$-stable et f-stable.
- Pro : Soit M matrice normale de $M_2(\mathbb{R})$ de spectre vide dans $\mathbb{R}$. Alors M est semblable à $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$.
- Théorème de réduction des endomorphismes normaux : Soit f un endomorphisme normal. Il existe une base orthonormée B de E dans laquelle on a :
  $Mat(f, B) = Diag(\lambda_1, .., \lambda_r, P_1, .., P_s)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $P_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$.
- App : Pour $M \in A_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq $PMP^{-1} = Diag(0, .., 0, P_1, .., P_s)$ avec $P_j = \begin{pmatrix} 0 & -b_j \\ b_j & 0 \end{pmatrix}$, $b_j \in \mathbb{R}$.
- App : Si n est impair, toute matrice antisymétrique est de déterminant nul.

## 4. Endomorphismes orthogonaux. —

1. *Quelques propriétés.* —
   - Pro : Soit $f \in End(E)$. On a l'équivalence :
     i) f est orthogonal.
     ii) $\forall x, y \in E, < f(x), f(y) >=< x, y >$.
     iii) $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.
     iv) f envoie toute base orthonormée de E sur une autre base orthonormée de E.
     v) f envoie une base orthonormée de E sur une base orthonormée de E.
   - Pro : $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$ dont le centre est $\{\pm Id_E\}$.
   - Pro+Def : Pour $M \in O_n(\mathbb{R})$, $det(M) = \pm 1$.
     On définit alors $SO_n(\mathbb{R}) := O_n^+(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$ les sous-ensembles de matrices de $O_n(\mathbb{R})$ de déterminant respectivement 1 et -1.
   - Pro : $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.
   - Pro : Les valeurs propres des matrices $M \in O_n(\mathbb{R})$ sont incluses dans $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
   - Pro : Soit f orthogonal et F un s-ev f-stable. Alors $F^\perp$ est f-stable.
   - Théorème de réduction : Soit f orthogonal. Il existe une base orthonormée B de E dans laquelle $Mat(f, B) = Diag(I_p, -I_r, P_1, .., P_s)$ avec $P_j = \begin{pmatrix} cos(t_j) & -sin(t_j) \\ sin(t_j) & cos(t_j) \end{pmatrix}$, $t_j \in [0, 2\pi[-\{0, \pi\}$.
2. *Etude en dimensions 2 et 3.* —
   - Pro : Les matrices de $O_2(\mathbb{R})$ sont semblables à $\begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t) \\ sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$ pour celles de $SO_2(\mathbb{R})$, ou à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ pour celles de $O_2^-(\mathbb{R})$.
   - Pro : Les matrices de $SO_3(\mathbb{R})$ sont semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(t) & -sin(t) \\ 0 & sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$ pour un $t \in [0, 2\pi[$.
     Celles de $O_3^-(\mathbb{R})$ sont $-I_3$ ou semblables à $Diag(-1, 1, 1)$.
   - Pro : Pour $M \in SO_3(\mathbb{R})$, on a alors : $det(M) = 1$, $Tr(M) = 1 + 2cos(t)$.
   - Pro : Pour $M \in So_3(\mathbb{R})$,$M \neq I_3$, et pour $x \in Ker(M - I_3)$, l'endomorphisme associé à M est une rotation d'angle $t = \arccos(\frac{Tr(M)-1}{2})$ dans le plan orthogonal à la droite $\mathbb{R}x$.
   - Exemple de $M \in SO_3(\mathbb{R})$.
   - **Dev** : Soit G le groupe des quaternions de norme 1. Alors $G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.
   - Rem : Cet isomorphisme, permet de ramener le calcul de l'image d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ par une rotation à des produits dans $\mathbb{H}$ en identifiant les vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ du repère orthonormé canonique de $\mathbb{R}^3$ aux éléments i,j,k de $\mathbb{H}$. (utilisé en simulations 3D)
3. *Topologie du groupe orthogonal, applications.* —
   - Pro : $O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $M_n(\mathbb{R})$.
   - App : La décomposition polaire $M \mapsto (O, S)$ est un homéomorphisme.
   - Pro : $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $Gl_n(\mathbb{R})$.
   - App : Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(AA^t)}$.
   - Pro : Pour $n \geq 2$, $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. $O_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs.
   - **Dev** : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_2$.

**Références**

Grifone : Adjoint d'un endomorphisme, propriétés, conservation du rang/det/$\chi$,$\mu$, auto-adjoint, antisymétrique, orthogonal, normal, lien matriciel, exemples. Endomorphismes orthogonaux, propriétés, valeurs propres. Réduction d'endomorphismes orthogonaux en dimension 2 et 3, caractérisation par Tr et det, axe et angle d'une rotation.
Gourdon : Endomorphismes auto-adjoints, propriétés, $S_n^+(\mathbb{R})$, espaces f-stables, th de réduction, réduction de formes quadratiques, pseudo-réduction simultanée. Endomorphismes normaux, propriétés, espaces f-stables, exemples, th de réduction, réduction des antisymétriques. Endomorphismes orthogonaux, espaces f-stables,$O_n(\mathbb{R}), SO_n(\mathbb{R})$, th de réduction.
Caldero, Germoni : $exp : S_n \to S_n^{++}$ homéomorphisme.(Dev) $O_n(\mathbb{R})$ compact, $SO_n(\mathbb{R})$ compact, connexe par arcs. $O_n(\mathbb{R})$ s-g compact maximal.
FGN (Algèbre 3) : log(det()) strictement convexe sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$, racine carrée sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$, décomposition polaire, norme 2 et rayon spectral. Décomposition polaire homéo.
Szpirglas : Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$.(Dev)

---

*June 3, 2017*

*Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes*